Zur vollständigen Geometrisierung der physikalischen Welt

M. BÖRNER*

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1825—1834 [1967]; eingegangen am 23. Juli 1967)

Es werden die Strukturmöglichkeiten des RIEMANNschen Raumes untersucht, dem zunächst keinerlei physikalische Eigenschaften zugewiesen werden. Hierzu wird eine lokale Darstellung der Metrik in Normalkoordinaten benutzt. Die auftretenden Normaltensoren sind Tensoren im gesamten affinen Raume, auf dem die Metrik erklärt ist. Die Forderung nach Positiv-Definitheit schränkt durch invariante Tensorgleichungen die Strukturmannigfaltigkeiten entscheident ein und bevorzugt den 3-dimensionalen Raum. Dieser wird durch (natürliche) Randbedingungen, die das Verschwinden der Metrik im Unendlichen ausdrücken, ohne einen weiteren Freiheitsgrad eindeutig festgelegt; Räume geringerer Dimensionszahl sind unter diesen Randbedingungen überbestimmt, Räume höherer Dimensionszahl unterbestimmt. Verschiedene Strukturierungen des so metrisierten 3-dimensionalen Raumes sind nur möglich bei Änderung des Grades der lokalen Entwicklung des metrischen Feldes. Es erscheint denknotwendig, wenn man überhaupt eine Beziehung zwischen Physik und metrischem Raume vermutet, den Grad der lokalen Entwicklung und damit die höchste Stufe der zur Darstellung verwendeten Normaltensoren mit einem nicht-kontinuierlichen, absoluten Zeitparameter $T-2$ zu identifizieren. Es ist dann die Aufgabe gestellt, die so in Raum und absoluter Zeit verfügbaren Strukturen mit den uns geläufigen physikalischen Prozessen anhand ihrer äquivalenten mathematischen Darstellungen zu identifizieren und sie dadurch nicht mehr als Vorgänge im Raume, sondern selbst als strukturierten Raum zu verstehen. Die Konsequenzen werden erörtert.

1. Zum Problemkreis

Bis zu RIEMAN faßte man den Raum als eine a priori existierende Wesenheit auf, in die die physikalische Welt eingefügt ist, ohne selbst in irgend einer Weise auf die Struktur des Raumes zu wirken. RIEMANN vermutete, daß die metrische Struktur des Raumes von der materiellen Erfüllung desselben wenigstens mitbestimmt werden kann[1]. Die Maßstruktur wird durch die Angabe der positiv-definiten quadratischen Differentialform $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$ lokal beschrieben. Daß diese Invariante quadratisch sein muß, zeigen v. HELMHOLTZ und LIE[2,3].

Bis hierher sind die Überlegungen rein geometrisch-mathematischer Natur. Fußend einerseits auf RIEMANNS Vermutung über den Zusammenhang zwischen metrischer Struktur g_{ij} und materieller Ausfüllung des Raumes und andererseits auf Erkenntnissen über die Raum-Zeit-Struktur seiner Relativitätstheorie schuf EINSTEIN eine Gravitationstheorie[4].

Vom Standpunkt eines rein mathematisch-logischen Verständnisses der physikalischen Welt ist diese zweite Wurzel dieser ersten geometrischen Theorie eines physikalischen Geschehens abzulehnen. Mir scheint nämlich, daß durch die Einführung des unmathematischen Begriffes „Zeit" als Komponente eines in gewisser Weise metrisierten affinen Raumes die mathematisch-geometrische Naturerkenntnis, die wenigstens letzten Endes nach Wesensgleichheit sucht, auf die Stufe der Betrachtung bloß äußerlicher Ähnlichkeit zwischen physikalischem Geschehen und einem nicht aus sich heraus zwingenden mathematischen Formalismus reduziert wird.

Diese Bemerkungen sollen natürlich nichts gegen die Zweckmäßigkeit aussagen, speziell die Gravitationswechselwirkung in der bekannten Form der EINSTEINschen Gravitationstheorie zu beschreiben. Aber vom Standpunkt einer umfassenden Verallgemeinerung auf alle übrigen Kräfte der Physik erscheint mir der Ausgangspunkt doch als etwas zu speziell.

Im folgenden wollen wir, aufbauend nur auf mathematisch-geometrischen Begriffen, zunächst eine Theorie möglicher Raumstrukturen entwickeln. Wir gehen dabei in zwei Schritten voran: Als erstes betrachten wir die lokalen Eigenschaften des metrisierten affinen Raumes. Dabei wird sich ein System von Differentialgleichungen (Differentialinvarianten) ergeben. Die Lösung dieses Systems besitzt noch einen Rest an Willkür, der durch Einführung

* 7900 Ulm/Donau, Sylvanerweg 4.

[1] B. RIEMANN, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Gött. Abh. **13**, 1—20 [1868].

[2] H. v. HELMHOLTZ, Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen, Gött. Nachr. **1868**, 193—221.

[3] S. LIE, Über die Grundlagen der Geometrie I, II. Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig **42**, 284—321 u. 355—418 [1890].

[4] A. EINSTEIN, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Barth, Leipzig 1916.

nichtlokaler Zusatzbedingungen weiter eingeengt wird.

Es ergibt sich schließlich, daß der drei-dimensionale RIEMANNsche Raum V_3 mit positiv-definiter Metrik vor allen anderen metrischen Räumen ausgezeichnet ist, wenn man fordert, daß im Unendlichen das metrische Feld wie ein EUKLIDisches Feld verschwindet: Die höchste Ordnungszahl T des Differentialgleichungssystems kann man noch frei wählen, die Lösung des Systems ist eindeutig bis auf eine Eichtransformation und von keinem weiteren Parameter mehr abhängig. In diesem Umstand sehe ich übrigens nachträglich eine stärkere Rechtfertigung für die Einführung einer Metrik aus einer quadratischen Form, hier sogleich noch beschränkt auf die Dimensionszahl 3, als durch die Betrachtung von Transformationseigenschaften, so richtungsweisend jene Erkenntnisse auch waren[3,5,6].

Nachdem so die vom mathematischen Standpunkt möglichen Raumstrukturen erkannt sind, bleibt als ein dritter Schritt deren Identifizierung mit den uns gewohnten Parametern unserer physikalischen Welt. Die Schlüsselstellung nimmt der physikalische Begriff ,,Zeit" ein. Dadurch, daß wir ihn in Zusammenhang bringen werden mit der beliebig wählbaren Ordnungszahl T unseres Differentialgleichungssystems, ergibt sich dann auch die Möglichkeit, einen Vorwurf zu entkräften, der seit Aufstellung von Spinorgleichungen für Teilchen mit Spin 1/2 allen differentialgeometrisch begründeten Feldtheorien gemacht wurde. Die Spinorbeschreibungsweise ist offensichtlich bisher nötig bei der Darstellung von Wechselwirkungsprozessen, an denen Felder mit Spin 1/2 beteiligt sind; meiner Auffassung nach aber nur deshalb, weil man die Wechselwirkung über ein Zeitkontinuum ,,verschmiert". In dieser Theorie hier wird die Wechselwirkung aufgelöst in eine Folge diskreter Einzelzustände; die Zeit ist gequantelt worden. Die Raumstruktur bleibt überall stetig und wenigstens T-mal differenzierbar.

Beschäftigen wir uns aber zunächst mit der Aufstellung der Gleichungen für das metrische Feld.

2. Aufstellung von Differentialgleichungen, denen die Metrik gehorchen muß

Differentialgleichungen können nur das lokale Verhalten des metrischen Feldes charakterisieren und dieses, wenn auch wesentlich, so doch nur unvollständig in seinen Eigenschaften festlegen. Die lokalen Eigenschaften aber kann man in der affinen und metrischen Geometrie am besten durch Einführung von Normalkoordinaten übersehen[1,7–11]. Diese Koordinaten folgen in ihrem Ursprung den geraden bzw. kürzesten Linien des Raumes. Entwickelt man den metrischen Tensor nach Normalkoordinaten in einem bestimmten Punkte, so stellen die Entwicklungskoeffizienten Differentialinvarianten dar, die den Raumpunkt samt seiner Umgebung unabhängig vom Koordinatensystem charakterisieren. Wir schreiben alle von uns benötigten Beziehungen auf.

Die Metrik werde durch einen zweifach kovarianten, symmetrischen Tensor $g_{ij}(x)$ bestimmt (Kernindex-Schreibweise, Summationskonvention)

$$g_{ij} = g_{i'j'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\,, \tag{1}$$

$$g_{ij} = g_{ji}\,. \tag{2}$$

Die x^i, $x^{i'}$ seien zunächst beliebige affine Koordinaten. Der metrische Tensor bestimmt eine quadratische Form F_2,

$$F_2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\,, \tag{3}$$

von der wir später annehmen werden, daß sie positiv-definit sei. Im RIEMANNschen Raume V_n ist darüber hinaus ein affiner Zusammenhang Γ^i_{jk} erklärt, der eindeutig durch die Metrik bestimmt ist

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = \tfrac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \tag{4}$$

mit der Umkehrung

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{sj}\,\Gamma^s_{ki} + g_{is}\,\Gamma^s_{kj}\,. \tag{5}$$

Die Größe Γ^i_{jk} als geometrischer Zusammenhang transformiert sich wie folgt:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^j \partial x^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} + \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\Gamma^{i'}_{j'k'}\,. \tag{6}$$

5 D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, Teubner, Leipzig 1902.

6 H. FREUDENTHAL, Math. Z. **63**, 374 [1956].

7 H. VERMEIL, Bestimmung einer quadratischen Differentialform aus der Riemannschen und den Christoffelschen Differentialinvarianten mit Hilfe von Normalkoordinaten. Math. Ann. **79**, 289 [1919].

8 O. VEBLEN u. T. Y. THOMAS, The geometry of paths, Trans. Am. Math. Soc. **25**, 551 [1923].

9 T. Y. THOMAS, The identities of affinely connected manifolds, Math. Z. **25**, 714 [1926].

10 T. Y. THOMAS, The differential invariants of generalized spaces, Cambridge 1934.

11 O. VEBLEN, Invariants of quadratic differential forms, Cambridge Tracts N. 24 [1927].

Die Γ^i_{jk} bestimmen die Geometrie der geraden Linien des affinen Raumes vermittels des folgenden Systemes von Differentialgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = 0\,. \tag{7}$$

Im RIEMANNschen Raume V_n ist s die Bogenlänge; es gilt Gl. (4). Jetzt führen wir Normalkoordinaten ein im Punkte

$$x^i(0) = a^i\,. \tag{8}$$

Als Anfangsrichtungen ξ^i der neuen Koordinaten wählen wir die Richtung von geraden Linien bzw. von Geodätischen, die wir aus den Gln. (7) und (4) bestimmt haben:

$$\xi^i = (\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s)_0\,. \tag{9}$$

Damit schreibt sich die Lösung von Gl. (7) wie folgt:

$$x^i(s) = a^i + \xi^i s + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 s^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3 x^i}{\mathrm{d}s^3}\right)_0 s^3 + \cdots. \tag{10}$$

Die Größen $\left(\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^3 x^i}{\mathrm{d}s^3}\right)_0$ usw. bestimmt man aus Gl. (7) und den daraus durch fortgesetztes Differenzieren erhältlichen weiteren Gln. (7a), (7b) usw.

$$\frac{\mathrm{d}^3 x^i}{\mathrm{d}s^3} + \Gamma^i_{jkl} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} = 0\,, \tag{7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 x^i}{\mathrm{d}s^4} + \Gamma^i_{jklm} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s} = 0\,. \tag{7b}$$

Die Differenzierbarkeit setzten wir voraus. In der Gl. (7a) ist

$$\Gamma^i_{jkl} = \tfrac{1}{3} P\left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - 2\,\Gamma^i_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{kl}\right). \tag{11}$$

oder allgemein

$$\Gamma^i_{jkl\ldots mn} = \frac{1}{N} P\left(\frac{\partial \Gamma^i_{jkl\ldots m}}{\partial x^n} - (N-1)\,\Gamma^i_{\alpha jk\ldots l} \Gamma^\alpha_{mn}\right). \tag{12}$$

N zählt die kovarianten Indizes und P bedeutet Summation über alle Ausdrücke, die man aus dem in Klammern stehenden Ausdrucke durch zyklische Permutation der kovarianten Indizes erhält. Setzt man

$$\xi^i s = y^i\,, \tag{13}$$

so folgt mit Hilfe der Gln. (7a), (7b) usw. aus Gl. (10)

$$x^i(y) = a^i + y^i - \frac{1}{2!}\Gamma^i_{jk}(a^i)\, y^j y^k - \frac{1}{3!}\Gamma^i_{jkl}(a^i)\, y^j y^k y^l - \cdots. \tag{14}$$

Gl. (13) besagt, daß es ein Koordinatensystem gibt, ein Normalkoordinatensystem, in welchem sich die geraden Linien des affinen Raumes und die geodätischen Linien des RIEMANNschen Raumes wie die Geraden des EUKLIDischen Raumes darstellen lassen.

Man kann zeigen[8], daß es zum Zentrum a^i noch andere Normalkoordinatensysteme gibt, die alle durch die Transformation

$$y^i = a^i_{i'} y^{i'} \tag{15}$$

aus einander hervorgehen, wobei die $a^i_{i'}$ Konstante sind. Jetzt wollen wir den Fundamentaltensor $g_{ij}(y)$ des RIEMANNschen Raumes V_n in der Nähe des Punktes a^i nach Normalkoordinaten entwickeln. Das ergibt

$$g_{ij}(y) = g_{ij}(0) + g_{ij,k_1} y^{k_1} + \frac{1}{2!} g_{ij,k_1 k_2} y^{k_1} y^{k_2} + \frac{1}{3!} g_{ij,k_1 k_2 k_3} y^{k_1} y^{k_2} y^{k_3} + \cdots. \tag{16}$$

Dabei ist

$$g_{ij,k_1\cdots k_p} = \left(\frac{\partial^p g_{ij}(y)}{\partial y^{k_1} \partial y^{k_2} \ldots \partial y^{k_p}}\right)_{y=0} (k_1 \ldots k_p = 1 \ldots n)\,. \tag{17}$$

Die metrischen Normaltensoren $g_{ij,k_1\ldots k_p}(x)$ sind Funktionen der $g_{ij}(x)$ und deren gewöhnlichen Ableitungen; das wollen wir zeigen. Im folgenden seien die x^i immer beliebige affine Koordinaten, die y^i immer Normalkoordinaten. Entsprechend Gl. (1) gilt immer

$$g_{ij}(y) = g_{i'j'}(x) \frac{\partial x^{i'}}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial x^{j'}}{\partial y^j}\,. \tag{18}$$

Dann gilt offenbar auch

$$g_{ij,k_1} = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^{k_1}}\right)_{y=0} = \left\{\frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{l'}} \cdot \frac{\partial x^{l'}}{\partial y^{k_1}} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial x^{j'}}{\partial y^j} + g_{i'j'}\left(\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial y^{k_1} \partial y^i} \cdot \frac{\partial x^{j'}}{\partial y^j} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial y^{k_1} \partial y^j}\right)\right\}_{y=0} \tag{19}$$

Setzt man für die Ableitungen der $x^{i'}$ nach den y^j die Werte ein, die man aus Gl. (14) an der Stelle $y=0$ ermittelt hat, so erhält man

$$g_{ij,k_1} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k_1}} - g_{\alpha j}\,\Gamma^{\alpha}_{k_1 i} - g_{i\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{jk_1}\,. \tag{20}$$

Nach Gl. (5) verschwindet g_{ij,k_1} (die erste kovariante Ableitung von g_{ij}) im RIEMANNschen Raume. Die Größen $g_{ij,k_1\ldots k_p}$ für $p \geqq 2$ sind zunächst durchaus von Null verschieden und auf die gleiche Weise zu gewinnen wie g_{ij,k_1}. Es wird z. B.

$$g_{ij,k_1k_2} = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^{k_1}\partial x^{k_2}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\alpha}}\,\Gamma^{\alpha}_{k_1k_2} - S\left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^{k_1}}\,\Gamma^{\alpha}_{k_2 i}\right) - S\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^{k_1}}\,\Gamma^{\alpha}_{jk_2}\right) - g_{\alpha\beta}\,S(\Gamma^{\alpha}_{k_1 i}\,\Gamma^{\beta}_{k_2 j}) - g_{\alpha j}\,\Gamma^{\alpha}_{ik_1k_2} - g_{i\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{jk_1k_2}\,. \tag{21}$$

S bedeutet, daß über alle Kombinationen von k_1, k_2 in dem zugehörigen Klammerausdruck zu summieren ist. Die Tensoren $g_{ij,k_1\ldots k_p}$ werden von VEBLEN p-te Extension von g_{ij} genannt, und nur die erste Extension ist mit der ersten kovarianten Ableitung identisch.

Es sei vermerkt, daß sich die Normaltensoren p-ter Stufe durch den Krümmungstensor R_{ijkl} und seine kovarianten Ableitungen bis $(p-2)$-ter Stufe darstellen lassen. Zum Beispiel gilt

$$g_{ij,kl} = \tfrac{1}{3}\,(R_{ikjl} + R_{jkil})\,. \tag{22}$$

Zwischen den Komponenten der metrischen Normaltensoren bestehen Beziehungen, die dazu führen, daß nur eine gewisse Zahl $G(n,p)$ voneinander unabhängig sind[8,9].

$$G(n,p) = \frac{n}{2}\,\frac{(n+p-1)!}{(n-2)!}\cdot\frac{p-1}{(p+1)!} \quad (p \geqq 1) \tag{23}$$

Unser weiteres Vorgehen soll folgendem Wege folgen: Wir werden auf Grund der Forderung, $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ sei positiv-definit in einer Umgebung des Punktes $y^i=0$ bzw. $x^i=a^i$, die Bedingungen finden, denen die $g_{ij,k_1\ldots k_p}$ notwendig genügen müssen. Diese Bedingungen sind die gesuchten Differentialgleichungen, deren Anzahl für beliebiges p wir kennen [Gl. (23)]. Andererseits bestimmen diese Differentialgleichungen natürlich auch (indem man sie weiter differenziert) die folgenden Ordnungen von bisher verschont gebliebenen Entwicklungskoeffizienten in Gl. (16). Die Anzahl der dann noch unabhängig bleibenden Entwicklungskoeffizienten (im Punkte $y=0$) oder Funktionen der x^i ist zu bestimmen. Dabei ist der folgende weitere Umstand wichtig: Nehmen wir an, die Reihe Gl. (16) bräche beim Gliede T ab, es sei also

$$g_{ij,k_1\ldots k_p} = 0 \quad (p \geq T)\,. \tag{24}$$

Über die Anzahl, der schon auf Grund der Forderung nach einer positiv-definiten quadratischen Differentialform bestimmten Koeffizienten hinaus stellen die Gln. (24) ein neues System von zusätzlichen Differentialgleichungen dar, dessen Einfluß auf die Funktionen g_{ij} jedoch sofort abzusehen ist, wenigstens in Normalkoordinaten: Da T wegen Gl. (15) eine Invariante unter beliebigen Transformationen der affinen Koordinaten x^i ist, gibt $(T-1)$ ein Maß (zunächst bis auf die auch durch die Forderung nach positiv-definiter Metrik noch gelassene Freiheit) für die Kompliziertheit der Raumstruktur. Beispielsweise würde $T=2$ bedeuten, daß wegen Gl. (22) die Krümmung des Raumes verschwinden muß für alle x^i, d. h. der Raum wird zum EUKLIDischen Raume, wobei allerdings noch eine Verzerrung und Drehung des Koordinatensystems auf Grund der Gl. (15) erlaubt wäre, die durch lokale Forderungen nicht ausschließbar ist.

Wir betrachten also zunächst die Bedingungen, die durch die Forderung nach einer positiv-definiten quadratischen Differentialform $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ gestellt werden.

Hierfür ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß alle in der Determinante $|g_{ij}|$ vorkommenden Hauptunterdeterminanten größer als Null sind:

$$g_{ii}(x) > 0\,, \tag{25a}$$

$$\begin{vmatrix} g_{ii}(x) & g_{ij}(x) \\ g_{ij}(x) & g_{jj}(x) \end{vmatrix} > 0\,, \tag{25b}$$

$$\begin{vmatrix} g_{ii}(x) & g_{ij}(x) & g_{ik}(x) \\ g_{ij}(x) & g_{jj}(x) & g_{jk}(x) \\ g_{ik}(x) & g_{jk}(x) & g_{kk}(x) \end{vmatrix} > 0\,. \tag{25c}$$

Die Bedingungen sind natürlich teilweise voneinander abhängig. Im einzelnen folgt aus Gl. (16) und Gl. (25a) als notwendige Bedingung für die $g_{ij,k_1\ldots k_p}$

$$g_{ii,k_1} = 0\,, \tag{26a}$$

$$g_{ii,k_1k_2k_3} = 0 \tag{26b}$$

oder allgemein

$$g_{ii,k_1\ldots k_{2p+1}} = 0\,. \tag{26c}$$

Durch eine entsprechende Transformation mit Hilfe, der $a^{i}_{i'}$ in Gl. (15) könnte man sonst immer erreichen, daß $g_{ii} < 0$ wird. Aus den Gln. (16) und (25b) folgt weiter mit Rücksicht auf die Gl. (26)

$$\begin{aligned} 0 < & -2\, g_{ij}(0)\, g_{ij,k_1} y^{k_1} - 2\left(\frac{1}{3!}\, g_{ij}(0)\, g_{ij,k_1k_2k_3} + \frac{1}{2!}\, g_{ij,k_1} g_{ij,k_2k_3}\right) y^{k_1} y^{k_2} y^{k_3} \\ & - \frac{1}{3!}\, g_{ij,k_1k_2} \cdot g_{ij,k_3k_4k_5}\, y^{k_1} y^{k_2} y^{k_3} y^{k_4} y^{k_5} + \cdots \\ & + \begin{vmatrix} g_{ii}(0) & g_{ij}(0) \\ g_{ij}(0) & g_{jj}(0) \end{vmatrix} + \left(\frac{1}{2!}\, g_{ii}(0)\, g_{ij,k_1k_2} + \frac{1}{2!}\, g_{jj}(0)\, g_{ii,k_1k_2} - g_{ij}(0)\, g_{ij,k_1k_2} - g_{ij,k_1} g_{ij,k_2}\right) y^{k_1} y^{k_2} \\ & + \left(\frac{1}{4!}\, g_{ii}(0) g_{jj,k_1k_2k_3k_4} + \frac{1}{2!\,2!}\, g_{ii,k_1k_2}\, g_{jj,k_3k_4} + \frac{1}{4!}\, g_{jj}(0)\, g_{ii,k_1k_2k_3k_4} \right. \\ & - \frac{1}{4!}\, g_{ij}(0)\, g_{ij,k_1k_2k_3k_4} - \frac{1}{2!\,2!}\, g_{ij,k_1k_2} g_{ij,k_3k_4} - \frac{1}{4!}\, g_{ij}(0)\, g_{ij,k_1k_2k_3k_4} \\ & \left. - \frac{2}{3!}\, g_{ij,k_1}\, g_{ij,k_2k_3k_4}\right) y^{k_1} y^{k_2} y^{k_3} y^{k_4} + \cdots . \end{aligned} \tag{27}$$

Auch hier müssen die Koeffizienten ungerader Ordnungszahl in den y^{k_i} notwendig verschwinden, so daß schließlich über die Gl. (26) hinaus allgemein gilt

$$g_{ij,k_1\ldots k_{2p+1}} = 0 . \tag{28}$$

Zusammen mit Gl. (24) stellt Gl. (28) ein System von Differentialgleichungen dar, dessen Einfluß auf die restlichen, nicht verschwindenden Koeffizienten $g_{ij,k_1\ldots k_{2p}}$ wir jetzt untersuchen müssen. Zunächst sei noch bemerkt, daß die Gln. (24), (28) keine hinreichenden Bedingungen darstellen für eine positiv-definite Metrik. Um hinreichende Bedingungen zu gewinnen, muß man vielmehr auch die Funktionen $g_{ij,\,k_1\ldots k_{2p}}$ mitbetrachten, das heißt also praktisch, das System der Gln. (24), (28) lösen und feststellen, ob Gl. (27) erfüllt ist. Immerhin läßt sich folgende wichtige Aussage machen: Sind in Gl. (27) die quadratischen Formen in den y^{k_i}, bzw. die formal als Produkte von quadratischen Formen darstellbaren, in y^{k_i} $(2n)$-nären Formen positiv-definit, so behalten sie diese Eigenschaft auf Grund des Trägheitssatzes für quadratische Formen auch unter beliebigen Transformationen der affinen Koordinaten wegen Gl. (15) bei.

Zur Auffindung der auf Grund der Gln. (28) erzwungenen zusätzlichen Identitäten zwischen den Komponenten der $g_{ij,\,k_1\ldots k_{2p}}$ ($p \geqq 2$, für $p = 1$ sind diese Identitäten in der Zahl $G(n, p)$ auf Grund der auch in der bisherigen RIEMANNschen Geometrie schon gültigen Gleichungen schon berücksichtigt!) kann man grundsätzlich wie bei der Auffindung der Anzahl $G(n, p)$ in der RIEMANNschen Geometrie vorgehen. Dort findet man[11] auf Grund der Beziehung

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\, y^i\, y^j = 0 \tag{29}$$

eine Folge von Identitäten

$$P(g_{ia,bc\ldots d}) = 0 , \tag{30}$$

und P bedeutet die Summe über alle zyklischen Vertauschungen der Größen $a, b, c \ldots d$. Der Satz von Identitäten Gl. (30) ist vollständig[9] und führt direkt auf die Abzählung für $G(n, p)$[10].

Bei der Aufstellung der der Gl. (29) entsprechenden Relationen für höhere Differentiationsordnungen der g_{ij} auf Grund der Gln. (28) aber stößt man auf einen praktisch nicht mehr zu bewältigenden Rechenaufwand. Schreibt man die Gleichung $g_{ij,k_1k_2k_3} = 0$ vollständig aus (in [8], S. 574 ist eine Darstellung dieser Größe gegeben als Funktion der Γ^i_{jk}, Γ^i_{jkl}, Γ^i_{jklm}), in dem man, was offensichtlich bei unserem Vorhaben nicht umgehbar ist, nur das Auftreten der g_{ij} bzw. g^{kl} und deren gewöhnlicher Ableitungen zuläßt [vgl. die Gln. (5), (11), (12)], so ergibt sich eine mehrere hundert Seiten lange Gleichung. Der Aufwand steigt ins Unermeßliche, will man den Einfluß der Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung ($g_{ij,k_1k_2k_3k_4k_5} = 0$ usw.) auf die Anzahl der unabhängigen Komponenten von $g_{ij,k_1\ldots k_{2p}}$ feststellen. Vielleicht helfen hier Rechenautomaten, die mit Symbolen rechnen können.

Im folgenden wollen wir daher wenigstens den Einfluß des Differentialgleichungssystems Gl. (28) auf die Anzahl der unabhängigen Komponenten der Tensoren $g_{ij,\,k_1\ldots k_{2p}}$ abzuschätzen versuchen.

Um einen anschaulichen Überblick zu haben, schreiben wir zunächst einmal tabellarisch die Anzahl der Feldgleichungen F bzw. der durch sie wenigstens teilweise zu bestimmenden Entwicklungskoeffizienten (Anzahl K) für die Dimensionszahlen $n=2, 3, 4$ hin. In der ersten Reihe steht die Anzahl der Entwicklungskoeffizienten $p=0$-ter Ordnung, das heißt die Zahl $\frac{1}{2} n(n+1)$. Die Anzahl der in der $p=0$-ten und $p=2$-ten Reihe stehenden Entwicklungskoeffizienten wird durch die Feldgleichungen nicht mehr beeinflußt. Die Feldgleichungen $p=3$-ter Ordnung aber reduzieren sowohl

n	2		3		4		. .		
p	K	F	K	F	K	F	. .		
0	3		″6		′10		. .		
1		0		′1		″0		. .	
2	1		″6		′20		. .		
3		2		15		′60		. .	
4	3		27		126		. .		
5		4		42		224		. .	
6	5		′60		360		. .		$G(n, p)$
7		6		81		540		. .	
8	7		105		770		. .		
.		. .		. .		. .		. .	
.	. .		. .		. .		. .		

Tab. 1. Die Anzahl der Entwicklungskoeffizienten K und die Anzahl der Feldgleichungen F

die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten K als auch die der Feldgleichungen F höherer Ordnung und schließlich diese Feldgleichungen höherer Ordnung alle auf diese folgenden Koeffizienten und Gleichungen. Zum Beispiel bestimmen also im Falle $n=3$ die 15 unabhängigen Feldgleichungen $g_{ij,k_1k_2k_3}=0$ die folgenden 27 Entwicklungskoeffizienten 4. Ordnung wenigstens teilweise und liefern zusammen mit den aus den 42 unabhängigen Gleichungen $g_{ij,k_1k_2k_3k_4k_5}=0$ auf Grund von $g_{ij,k_1k_2k_3}=0$ übrigbleibenden Gleichungen Bedingungen für die 60 Koeffizienten 6. Ordnung. Die Abschätzung, die wir machen wollen, sieht nun folgendermaßen aus: Existieren keine Identitäten, so hat eine TAYLOR-Entwicklung von $\frac{1}{2} n(n+1)$ Feldfunktionen g_{ij} in der p-ten Differentiationsstufe im n-dimensionalen $Z(n, p)$ unabhängige Koeffizienten,

$$Z(n, p) = \tfrac{1}{2}\, n(n-1) \tbinom{n}{p} \tag{31}$$

und das Verhältnis

$$\frac{Z(n, p)}{Z(n, p-s)} = \frac{(n+p-s)(n+p-s+1)\dots(n+p-1)}{(p-s+1)(p-s+2)\dots p} \tag{32}$$

gibt an, in welchem Maße die Anzahl der Koeffizienten von der $(p-s)$-ten zur p-ten Stufe als Folge fortgesetzter Differentiation steigt. (Diese Abzählung folgt aus der Vertauschbarkeit der Differentiation nach verschiedenen Koordinaten.) Bei zusätzlichen Identitätsbeziehungen folgen dann z. B. aus den $G(n, 3)$ Feldgleichungen $p=3$-ter Ordnung weniger als $G(n, 3) \cdot Z(n, 4)/Z(n, 3)$ Zusatzbedingungen. Das bedeutet, daß für die Anzahl $G^*(n, 4)$ der Koeffizienten, die dann noch unabhängig bleiben, folgt:

$$G^*(n, 4) > G(n, 4) - G(n, 3) \cdot Z(n, 4)/Z(n, 3)\,. \tag{33}$$

Statt $G(n, 4) = 3, 27, 126\dots$ Koeffizienten hätte man dann $G^*(n, 4) > 0{,}5,\ 4{,}5,\ 21\dots$ Koeffizienten. Betrachtet man speziell den Fall für $n=3$, so findet man, daß aus Symmetriegründen wahrscheinlich 6 unabhängige Koeffizienten übrig bleiben werden. Wegen der Fortpflanzung von Fehlern wird natürlich unsere Abschätzung für höhere Ordnungen der Koeffizienten K immer ungenauer. Immerhin bleibt $G^*(3, p)$ zunächst noch von der Größenordnung >4. Ich vermute, daß

$$G^*(3, p) = 6 \tag{34}$$

ist, unabhängig von p. Für alle übrigen Dimensionszahlen ist eine entsprechende Beziehung mit Sicherheit nicht erfüllt, wie ein Blick auf die ersten Zeilen der Tab. 1 schon erkennen läßt. Für $p \geqq T$ verschwindet $G^*(n, p)$ wegen Gl. (24). Sicherlich genügt aber hierzu schon die Gleichung $g_{ij,k_1\dots k_p}=0$ für $p=T$ (T gerade), da durch forgesetztes Differenzieren in den folgenden Differentiationsstufen aus dieser Gleichung so viele Zusatzbedingungen für die Gleichungen der Stufe $T+2$, $T+4$ usw. folgen, daß diese nur mit $g_{ij,k_1\dots k_p}=0$ für $p>T$ befriedigt werden können. Die Zahl dieser Bedingungen ist wahrscheinlich sogar so groß, daß auch die Gleichungen $g_{ij,k_1\dots k_{T+1}}=0$, $g_{ij,k_1\dots k_{T+3}}=0$ usw. [vgl. Gl. (28)] mit folgen. Die Gln. (24), (28) stellen dann ein endliches Gleichungssystem dar, wobei p in Gl. (24) auf $p=T$ (T gerade) und in Gl. (28) auf $p=1, 3, \dots, T-1$ beschränkt ist.

An dieser Stelle sei noch vermerkt, daß wir in dieser Theorie hier ohne RICCI-Kalkül auskommen; die Gleichung für die infinitesimale Parallelverschiebung des metrischen Tensors ergibt sich schon auf Grund der Forderung, daß $g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$ positiv-definit sei [Gl. (24) für $p=1$].

Als Ergebnis der Untersuchungen des lokalen Verhaltens eines RIEMANNschen Raumes mit notwendig positiv-definiter Metrik wollen wir festhalten, daß die Anzahl $G^*(n, p)$ der unabhängigen Entwicklungskoeffizienten des metrischen Tensors g_{ij}

nach Normalkoordinaten im 3-Dimensionalen, aber sicher nur dort, in jeder Differentiationsstufe wahrscheinlich gleich der Anzahl der unabhängigen Feldfunktionen, also gleich 6 ist.

Damit ist dieser 3-dimensionale Raum zunächst formal vor den übrigen Räumen ausgezeichnet.

3. Das Verhalten der Lösungen der Feldgleichungen im Großen und die Randbedingungen

Anschließend an die Untersuchungen des lokalen Verhaltens des g_{ij}-Feldes in der Nachbarschaft eines beliebigen Entwicklungszentrums $y^i = 0$ oder $x^i = a^i$ wollen wir die Einfügung des lokalen Feldes in den Gesamtraum studieren.

Zunächst bemerkt man, daß durch die n^2-parametrige, nichtsinguläreTransformation nach Gl. (15) in jedem Punkte des Raumes und seiner Umgebung eine vorerst beliebige Verdrehung und eine Verzerrung durchgeführt werden kann. Man benutzt dies zum Beispiel, um RIEMANNsche Normalkoordinaten [11] einzuführen, bei denen die $g_{ij}(0)$ [vgl. Gl. (16)] gleich 1 oder 0 werden, je nachdem ob $i = j$ oder $i \neq j$ ist; eine beliebige orthogonale Transformation bleibt noch frei wählbar. Die Verdrehung des Raumes ist für die Raumstruktur jedoch unerheblich im Gegensatz zur Verzerrung. Bei den später einzuführenden Randbedingungen werden wir implizit davon Gebrauch machen: Es gibt nur einen unendlich fernen Punkt.

Wie weit schränken Randbedingungen die noch die Raumstruktur beeinflussenden, lokal zulässigen Verzerrungen ein und wieweit bestimmen sie auf diese Weise die Geometrie im Großen?

Nehmen wir an, wir hätten eine allgemeine, im ganzen Raume singularitätsfreie Lösung des Systems der Gln. (24), (28) gefunden. Wir wissen, daß diese Lösung der Bedingung gehorcht, daß ihr „Informationsgehalt" beschränkt ist [vgl. Gl. (24)]. Nehmen wir also an, daß die Lösung die Eigenschaft hat, im wesentlichen in einem beschränkten Bereiche der Variablen x^k stark von diesen abzuhängen. Dann hat man die Möglichkeit, durch eine im ganzen Raume nichtsinguläre, nichtlineare Transformation die Lösung so zu transformieren, daß die $g_{ij}(x)$ für großes x^k ganz bestimmte Werte annehmen. Über die Anzahl und die Art der auf diese Weise gewonnenen Bedingungen sagen wir später etwas. Durch geeignete Wahl der freien Konstanten in der lokalen Darstellung des g_{ij}-Feldes [vgl. Gl. (16)] hat man dann die lokale Darstellung dieser Lösung, die die Randbedingungen erfüllt, anzupassen.

Es ist also offenbar zu untersuchen, auf wieviele verschiedene Arten diese lokale Anpassung durchgeführt werden kann. Dabei ergibt sich folgendes Bild.

Im Falle $n = 3$ ist gleichmäßig, das heißt für beliebiges T wegen Gl. (34) die Vorgabe des Wertes von $g_{ij}(y)$ in $T/2$ verschiedenen Punkten $y^i = y_1{}^i$ bis $y^i = y^i_{T/2}$ notwendig und hinreichend, um das lokale Feld des metrischen Tensors vollständig festzulegen. Die Metrik ist notwendig und hinreichend durch das System von Differentialgleichungen Gl. (24) und Gl. (28) (falls dieses System auch hinreichend eine positiv-definite Metrik bestimmt) und durch Vorgabe des Wertes von $g_{ij}(y)$ in $T/2$ Punkten charakterisiert [vgl. Gl. (37)]. Der Vorgabe von $g_{ij}(y)$ in $T/2$ Punkten entspricht gerade (s. u.) die Vorgabe von $6 \cdot T/2$ einzelnen Werten, einer Anzahl, die, wie wir unten sehen werden, auch gerade der Anzahl der natürlichen Randbedingungen entspricht. Das gilt für keine andere Dimensionszahl n.

Im Falle $n = 2$ ist nämlich durch Vorgabe von $g_{ij}(y)$ in $T/2$ verschiedenen Punkten die Metrik überbestimmt, und auch andere, sicherlich nicht mehr natürlich erscheinende Randbedingungen (s. u.) von geringerer Anzahl, lassen sich nicht gleichmäßig, das heißt für beliebiges T nach den gleichen Grundsätzen bestimmbar, einführen. Die Anzahl $\frac{1}{2} n (n+1) = 3$ der Komponenten von g_{ij} ist im allgemeinen nämlich nicht Teiler von

$$K_2 = \sum_{p=0,2,4\ldots}^{T-2} G^*(2, p)\,, \tag{35}$$

der Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten.

Umgekehrt ist es in allen Fällen $n > 3$. Dort ist die Metrik $g_{ij}(y)$ auch nach Vorgabe ihres Wertes in $T/2$ Punkten unterbestimmt. Auch durch ein Hinzunehmen weiterer Randbedingungen gegenüber dem Falle $n = 3$ ist sie für beliebiges T, bei eindeutigen, von T unabhängigen Vorschriften für die Gewinnung von Randbedingungen, nicht festlegbar, da wiederum $\frac{1}{2} n (n+1)$ im allgemeinen kein Teiler von

$$K_n = \sum_{p=0,2,4\ldots}^{T-2} G^*(n, p) \tag{36}$$

ist, der Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten.

Aus Gl. (37) entnimmt man die Einzelheiten:

$$g_{ij}(y)_{P_1} = \left\{ g_{ij}(0) + \frac{1}{2!} g_{ij,k_1k_2} y^{k_1} y^{k_2} + \frac{1}{4!} g_{ij,k_1\ldots k_4} y^{k_1} \cdots y^{k_4} + \cdots + \frac{1}{(T-2)!} g_{ij,k_1\ldots k_{T-2}} y^{k_1} \cdots y^{k_{T-2}} \right\}_{P_1}, \quad (37\,\mathrm{a})$$

$$g_{ij}(y)_{P_2} = \left\{ g_{ij}(0) + \frac{1}{2!} g_{ij,k_1k_2} y^{k_1} y^{k_2} + \frac{1}{4!} g_{ij,k_1\ldots k_4} y^{k_1} y^{k_2} + \cdots + \frac{1}{(T-2)!} g_{ij,k_1\ldots k_{T-2}} y^{k_1} \cdots y^{k_{T-2}} \right\}_{P_2}, \quad (37\,\mathrm{b})$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$g_{ij}(y)_{T/2} = \left\{ g_{ij}(0) + \frac{1}{2!} g_{ij,k_1k_2} y^{k_1} y^{k_2} + \frac{1}{4!} g_{ij,k_1\ldots k_4} y^{k_1} \cdots y^{k_4} + \cdots + \frac{1}{(T-2)!} g_{ij,k_1\ldots k_{T-2}} y^{k_1} \cdots y^{k_{T-2}} \right\}_{P_{T/2}}. \quad (37\,\mathrm{c})$$

Im Dreidimensionalen bestimmen $6 \cdot T/2$ lineare, inhomogene Gleichungen die $6 \cdot T/2$ Unbekannten $g_{ij}(0)$, $g_{ij,k_1k_2} \cdots g_{ij,k_1\ldots k_{T-2}}$. Die Werte von $g_{ij}(y)$ an weiteren Punkten der Umgebung von $y = 0$ erfüllen notwendig die Gl. (16), da vorausgesetzt war, daß sie die Gln. (24), (25) und die Randwerte erfüllen. Sie befriedigen insbesondere auch diejenige Gleichung, die aus Gl. (16) folgt, wenn man für die $g_{ij}(0)$, $g_{ij,k_1k_2} \cdots g_{ij,k_1\ldots k_{T-2}}$ die Werte einsetzt, die man aus Gl. (37) bestimmt hat.

Wie aber werden die allgemeinen, im ganzen Raume nichtsingulären Lösungen an die Randwerte angepaßt und wieviele solcher Anpassungsbedingungen gibt es? Dazu erinnern wir uns daran, daß wegen des endlichen Informationsgehaltes der Lösung offensichtlich im Unendlichen nicht mehr viel an Änderungen für die g_{ij} zu erwarten ist. Dann ist es sicher richtig, von einem bestimmten „Abstand" r vom eigentlichen Gebiet des strukturierten Raumes an g_{ij} nur noch von einer einzigen Variablen r abhängen zu lassen: Der Raum läuft in einen einzigen, den unendlich fernen Punkt aus. Es erscheint dann ziemlich künstlich, andere als die folgenden natürlichen Randbedingungen

$$g_{ij}(r) = 0 \quad (38\,\mathrm{a})$$

$$\mathrm{d}g_{ij}(r)/\mathrm{d}r = 0 \quad (38\,\mathrm{b})$$

$$\mathrm{d}^2 g_{ij}(r)/\mathrm{d}r^2 = 0 \quad (38\,\mathrm{c})$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{d}^p g_{ij}(r)/\mathrm{d}r^p = 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty \quad (38\,\mathrm{d})$$

anzusetzen [Gl. (38)]. Da diese Bedingungen mit ungerader Ordnung der Differentiation schon aus den Gln. (28) und allgemein für $p \geqq T$ aus den Gln. (24) folgen, stellen die Gln. (38) also

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(n+1) \cdot T/2$$

wesentliche Beziehungen dar, und diese Anzahl reicht im Dreidimensionalen gerade aus, wie wir gesehen haben, um den Anschluß des lokalen Feldes an diejenige Lösung zu erzwingen, die die Randbedingungen erfüllt. In der lokalen Darstellung fehlten doch gerade

$$K_3 = \sum_{p=0,2,4\ldots}^{T-2} G^*(3,p) = \tfrac{1}{2} \cdot 3\,(3+1) \cdot T/2 = 6 \cdot T/2 \quad (39)$$

zusätzliche Bedingungen.

Die Bedingungen nach Gl. (38) bestimmen die lokale Darstellung im Unendlichen. Sie erlauben aber wie bei der Darstellung in Normalkoordinaten in der Umgebung des Punktes $y^i = 0$ die Abzählung der Anzahl der relevanten Beziehungen. $g_{ij}(r)$ ist sozusagen die Darstellung von g_{ij} in Normalkoordinaten in der Umgebung des unendlich fernen Punktes, in dem die Metrik verschwindet.

Die Randbedingungen Gl. (38) und das System von Differentialgleichungen Gln. (24) und Gln. (28) bestimmen also bei Vorgabe von T den dreidimensionalen, RIEMANNschen Raum mit positiv-definiter Metrik eindeutig.

4. Geometrische Struktur des Raumes und physikalische Welt

Die uns umgebende physikalische Welt ist dreidimensional. Es liegt der Versuch nahe, die Vorgänge und Strukturen dieser Welt mit den aus den eben abgeleiteten Gleichungen und Bedingungen folgenden Strukturmannigfaltigkeiten zu vergleichen und zu identifizieren. Darüber hinaus kann man vermuten, daß gerade wegen der Existenz des dreidimensionalen physikalischen Raumes die Feldgleichungen im Falle $n = 3$ nicht nur den notwendigen Bedingungen für eine positiv-definite Metrik entsprechen, sondern daß diese Gleichungen auch Lösungen haben, die durch eine im ganzen Raume durchweg positiv-definite quadratische Differentialform gekennzeichnet sind.

Den folgenden Ausführungen seien noch ein paar Bemerkungen voraus geschickt, die verständlich machen sollen, daß die vollständige Geometrisierung der physikalischen Welt durch zwei mehr der allgemeinen Logik als speziellen physikalischen Denkgewohnheiten entspringende Prinzipien erzwungen wird: Durch das MACHsche Prinzip und das Prinzip der Einheitlichkeit der Naturkräfte.

Das MACHsche Prinzip fordert, daß im Falle der Gravitationswechselwirkung die fernen Massen des Universums nicht über den Umweg der Festlegung von Inertialsystemen die Lösung der Bewegungsgleichungen von lokalen Massenpunktsystemen bestimmen (NEWTONsche Mechanik), sondern in den Bewegungsgleichungen direkt vermerkt werden müssen.

Da andererseits, wie die NEWTONsche Mechanik zeigt, es mit sehr guter Näherung genügt, so zu tun, als ob die fernen Massen sich nur auf die Geometrie des Raumes durch Bevorzugung gewisser Koordinatensysteme in demselben auswirken, muß eine Theorie der Gravitation notwendig eine Theorie der Wechselbeziehungen von Raumeigenschaften und physikalischen Eigenschaften sein, in der gerade die fernen Massen eine entscheidende Rolle mitspielen.

Die MACHsche Forderung kann natürlich nicht nur für die Gravitationswechselwirkung erhoben werden, wo sie durch das bekannte Eimerexperiment sehr anschaulich gemacht wird. Nach dem Prinzip der Einheitlichkeit der Naturkräfte unterliegen außer der Gravitation alle übrigen Wechselwirkungen ebenfalls dem MACHschen Prinzip, und damit ist die Forderung erhoben, ihre Wechselbeziehungen zur Geometrie des Raumes aufzufinden.

Das Prinzip der Einheitlichkeit der Naturkräfte ist durch die klassischen Äquivalenzen der Energieformen und durch die Kopplung zwischen den nichtklassischen Feldern so erhärtet, daß man mit Sicherheit auf ein einheitliches Urfeld der physikalischen Erscheinungen schließen kann. Und dieses physikalische Urfeld muß in eindeutiger Beziehung zur Geometrie des Raumes stehen und das gesamte Universum umfassen.

Mir scheint, daß der im folgenden angedeutete Weg, so merkwürdig er anmuten mag, der einzig logisch mögliche ist, den durch eine sehr stark strukturierte positiv-definite Metrik charakterisierten 3-dimensionalen RIEMANNschen Raum mit uns geläufigen Größen der physikalischen Welt in Zusammenhang zu bringen.

Wir hatte man sich also die Identität zwischen physikalischer und geometrischer Struktur im einzelnen vorzustellen?

a) Für $T = \text{const.}$ hat man es auf jeden Fall mit einer statischen Welt zu tun, und T mißt den Informationsgehalt. Alle im Universum enthaltenen elementaren Teilchen (Anzahl $T/2$?) haben ihren festen Platz, sie bestimmen nicht nur das metrische Feld wie in der Gravitationstheorie EINSTEINS, sie sind mit ihm identisch.

b) Eine zeitliche Anordnung der Zustände wird möglich, indem man T ändert: $T+2$, $T+4, \ldots$, $T+2t$ (t ganz). Andere Zustände sind nicht möglich. Soll also die Weltgeometrie überall eine positiv-definite Metrik haben und die physikalische Welt vollständig beschreiben, so ist bei endlichem T und t nur eine endliche Anzahl unterschiedlicher Zustände mit einem unterschiedlichen Informationsgehalt möglich. Bei endlichem T und t ist eine andere Einführung des Zeitmaßes nicht möglich.

c) Nimmt man an, daß die aus Abschätzungen bekannte Zahl der augenblicklich existierenden Elementarteilchen ein Maß für T ist, dann würde unserem Weltzustand etwa ein T von 10^{79} zukommen. Selbst wenn sich T pro Sekunde um 10^{23} ändert (JORDANsche Elementarzeit[12]), so bedeutet das nur, daß sich unser Kosmos erst in etwa $3 \cdot 10^{48}$ Jahren verdoppelt haben würde.

d) Insbesondere würden in dieser Beschreibungsweise die Zustände niedersten Informationsgehaltes [$T = 2, 4, 6, \ldots$, Gl. (24)] bei Gültigkeit der Randbedingungen Gln. (38) die Urzustände des Kosmos bedeuten. Darüber hinaus kann man vermuten, daß für $T = 2, 4, 6, \ldots$ Teilstrukturen eines komplizierteren Kosmos beschrieben werden. Die in diesem Falle gültigen Randbedingungen hätten für große Abstände von den Teilstrukturen den Anschluß an den übrigen Kosmos zu bewerkstelligen. Aus dieser Kontinuumstheorie des metrischen Feldes folgen also zwangsläufig elementare Zustände (Elementarteilchen ?).

e) Erzwingt man [vgl. d)] den Anschluß in aller Strenge, dann kann natürlich nur ein einziger Teilzustand herauskommen; der Gesamtkosmos hat ja für $T = \text{const.}$ nur eine Lösung. Insbesondere bestimmt der Gesamtkosmos bei konstantem T über die Randbedingungen, die er in Teilbereichen eindeutig vorschreibt, auch den Zustand eines sehr umfangreichen Teilsystems, zum Beispiel des Sonnensystems. Das ist das MACHsche Prinzip in seiner schärfsten Form!

[12] P. JORDAN, Schwerkraft und Weltall, Vieweg, Braunschweig 1955.

f) Die Theorie verzichtet völlig auf eine Beschreibung der Welt oder ihrer Elemente mit Hilfe von Begriffen, die einer pauschalen und anschaulichen Betrachtungsweise entstammen (Impuls, Energie, Entropie, elektrisches Feld, Masse und dergleichen). Das macht ihren praktischen Nachteil und ihren schwerer wiegenden erkenntnistheoretischen Vorteil aus. Probleme, wie die Interpretation klassischer Größen (wie Impuls, Energie) bei quantenmechanischen Prozessen, existieren nicht. Das Geschehen in Raum und Zeitordnung hat weder mit Kausalität noch mit Wahrscheinlichkeit etwas zu tun. Beide Größen sind abgeleitete Begriffe, falls die Welt in allen ihren Erscheinungen durch die genannten Gleichungen beschreibbar ist. Auch die genannten physikalischen Größen (Impuls, Energie usw.) müssen abgeleitet werden aus einer Folge aufeinander folgender Lösungen für

$$T = T_0 + 2t \quad (t = 1, 2, 3, \ldots).$$

g) Es existieren keine geometrischen Invarianzen, also auch keine physikalischen Erhaltungssätze. Die Welt ist maximal inhomogen. Das entspricht auch neuesten Erkenntnissen der Himmelsforschung[13]. Verfolgt man jedoch Teilstrukturen des Kosmos über ein beschränktes, relativ schmales T-Intervall, so erscheint es wahrscheinlich, daß bei Außerachtlassung der Feinheiten, also der ständigen Änderungen im Gesamtkosmos in großer Entfernung vom betrachteten Teilsystem, sich geometrische Invarianzen ergeben, die dann über physikalische Erhaltungssätze zu Feld- oder Bewegungsgleichungen führen[14]. Das entspricht ganz dem bisherigen Vorgehen in der Physik: Durch Weglassen von ,,Nebensächlichem" (absolute Zeit, absoluter Ort zum Beispiel) gelingt überhaupt erst das Erkennen von Gesetzmäßigkeiten[15]. Gesetzmäßigkeit ist hier im Sinne von ,,wiederholbarer Vorgang" aufzufassen.

h) Nur bei Betrachtung umfangreicherer Teilstrukturen (mit vielen ,,Teilchen") über eine größere Menge t von Zuständen T, $T + 2, \ldots, T + 2t$ erscheint die Einführung eines kontinuisierten ,,Zeit"-Parameters t gerechtfertigt (klassische Physik). Insbesondere beim Studium von Wechselwirkungsprozessen zwischen wenigen ,,Teilchen" erscheint das nicht sinnvoll.

i) Die Frage, wie von einem Zustand T auf den benachbarten Zustand $T + 2$,,weitergeschaltet" wird, gehört nicht hierher. Wichtig ist allein, möglicherweise erkannt zu haben, daß zwischen physikalischer Welt und metrischer Struktur ein Isomorphismus besteht.

Oder ist es ein Automorphismus?

[13] W. A. AMBARZUMJAN, Einige methodologische Fragen der Kosmogonie. In: Philos. Probleme der modernen Naturwissenschaft, Akademie-Verlag, Berlin 1962, S. 242 bis 262.

[14] E. NOETHER, Invariante Variationsprobleme. Nachr. königl. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. **1918**, 235–257.

[15] E. P. WIGNER, Physikal. Blätter **7**. Jahrgang, **433** [1951].